

## PHÂN TÍCH TH NGUYÊN VÀ NG D NG

### **Gi i thi u**

Trong các ngành k thu t mà c bi t là trong môn c l u ch t, ph ng pháp th c nghi m có m t vai trò quan tr ng. Lý thuy t v phân tích th nguyên là c s cho các nghiên c u th c nghi m. Phân tích th nguyên giúp ta t ng quát hóa k t qu c a các thí nghi m riêng r , trình bày nó m t cách có h th ng v i ý ngh a v t lý rõ ràng, m r ng kh n ng ng d ng các k t qu này vào vi c d oán cho các tr ng h p khác.

Phân tích th nguyên là hai cách ti p c n khác nhau c a cùng m t v n - c s lý thuy t c a nghiên c u th c nghi m.

## I. PHÂN TÍCH TH NGUYÊN

### 1. Các khái ni m c b n

#### 1.1. Khái ni m c b n

Các i l ng v t lý có th chia ra làm hai lo i. M t lo i, ch ng h n nh chi u dài, di n tích, l c..., mà giá tr c a nó bao g m hai ph n: giá tr b ng s và n v o l ng c a nó, i ngay sau con s . Ví d o n ng dài 2.2m, t m ph ng có di n tích 1.2 cm<sup>2</sup> ho c áp l c tác đ ng trên t m ph ng là 98.1 N...Các i l ng v n có ý ngh a không i nh ng giá tr b ng s c a chúng có th thay i do ta ch n n v o l ng khác i. Ch ng h n 220 cm, 120 mm<sup>2</sup> và 10 kgf v n chính là 2.2 m , 1.2 cm<sup>2</sup> và 98.1 N. Các i l ng này c g i là các i l ng th nguyên. Lo i khác, ch ng h n h s ma sát, giá tr c a nó ch th h i n b ng m t con s và c l p v i h o l ng. Các i l ng ó c g i là các i l ng vô th nguyên.

#### 1.2. nh ngh a th nguyên

i l ng có th nguyên là i l ng mà giá tr b ng s c a chúng ph thu c vào h n v o l ng do ta ch n. Ng c l i, i l ng vô th nguyên là i l ng mà giá tr b ng s c a chúng không ph thu c vào h n v o l ng.

Các i l ng v t lý liên h v i nhau thông qua các nh lu t. M t trong s các i l ng y c ch n làm các i l ng c b n và con ng i ta thì t l p cho chúng các n v o l ng g i là n v o l ng c b n. n v o l ng c a các i l ng khác s c bi u di n theo các n v o l ng c b n này. ó là các n v o l ng đ n xu t, và các i l ng t ng ng – các i l ng đ n xu t. Ch ng h n, h o l ng SI (Système International) có 7 i l ng c b n.

i l ng	Ký hi u	n v
Chi u dài	L	m
Kh i l ng	M	Kg
Th i gian	T	s
Nhi t	K	K
C ng dòng i n	A	A
C ng ánh sáng	Cd	Cd
i l ng v t ch t	N	Mol

T t c các i l ng khác c bi u di n thông qua các i l ng này g i là các i l ng suy d n..

## Phân tích th nguyên và ng d ng

Trong c h c, th ng ch có 4 i l ng c b n c s d ng là chi u dài, kh i l ng, th i gian và nhi t .

H o l ng khác nh BG ( British Gravitational) và EE (English Engineering) s d ng chi u dài (ft), l c (lb), th i gian (sec) và nhi t Renkine ( $^{\circ}\text{R}$ ) làm các i l ng c b n.

*nh ngh a:* Th nguyên là công th c bi u di n n v d n xu t qua n v c b n. Nó th ng c trong d u ngo c vuông [ ].

Trong m t h th ng o l ng nào ó, các n v c b n là L, M, T thì i l ng a b t k s có th nguyên:

$$[a] = L^l M^m T^t$$

Ví d , trong h SI, th nguyên l c F s là:

$$[F] = \frac{[khuyluong][chieudai]}{[thoigian]^2}$$

và n v c a nó :  $1\text{N} = 1\text{kg.m/s}^2$

B ng th nguyên:

i l ng v t lý	Ký hi u	Th nguyên	
		H FLT	H MLT
1. c tr ng hình h c			
Chi u dài	L	L	L
Di n tích	S	$L^2$	$L^2$
Th tích	W	$L^3$	$L^3$
2. Tính ch t l u ch t			
Kh i l ng	m	$FT^2L^{-1}$	M
Kh i l ng riêng	$\rho$	$FT^2L^{-4}$	$ML^3$
Tr ng l ng	G	F	$MLT^{-2}$
Tr ng l ng riêng	$\gamma$	$FL^3$	$ML^3T^{-2}$
nh t ng h c	$\nu$	$L^2T^{-1}$	$L^2T^{-1}$
nh t ng l c h c	$\mu$	$FTL^{-2}$	$ML^{-1}T^{-1}$
Su t àn h i	K	$FL^{-2}$	$ML^{-1}T^{-2}$
S c c ng b m t	$\sigma$	$FL^{-1}$	$MT^{-2}$

## Phân tích th nguyên và ng d ng

3. c tính ng và ng			
l c	u, v	$LT^{-1}$	$LT^{-1}$
V n t c	$\omega, n$	$T^{-1}$	$T^{-1}$
V n t c g c	a	$LT^{-2}$	$LT^{-2}$
Gia t c th ng	F	F	$MLT^{-2}$
L c	P	$FL^{-2}$	$ML^{-1}T^{-2}$
Áp su t	$\tau$	$FL^{-2}$	$ML^{-1}T^{-2}$
ng su t ti p	Q	$L^3T^{-1}$	$L^3T^{-1}$
L u l ng	W, E	FL	$ML^2T^{-2}$
Công, n ng l ng	N	$FLT^{-1}$	$ML^2T^{-2}$
Công su t	M	FL	$ML^2T^{-2}$
Ng u l c, moment			

## 2. CÁC PH NG PHÁP PHÂN TÍCH TH NGUYÊN

Trong t nhiên, các hi n t ng v t lý là m t t ng h p các m i quan h gi a các tác nhân và h u qu . Chúng tác ng qua l i v i nhau, liên h v i nhau m t thi t. B t c m t thay i y u t nào c ng có th là nguyên nhân gây ra m t bi n i các y u t khác. Ch ng h n, khi gió th i lên m t v t th ng yên, nó tác d ng lên v t th m t l c. V n t c gió càng l n, l c tác d ng c ng t ng. Các y u t tác ng qua l i n ày c c tr ng b i các i l ng tu ng ng và hi n t ng v t lý ó có th c khái quát d i m t quy lu t có d ng m t hàm toán h c di n t quan h gi a các i l ng trên.

Ch ng h n, m t hi n t ng v t lý là m i quan h gi a n các y u t , trong ó các y u t c c tr ng b i các i l ng t ng ng a,  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ , ta có m i t ng quan:

$$a = f(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$$

$f$  là m t hàm. Trong a s các tr ng h p, ta không bi t m t cách rõ ràng, chính xác là hàm  $f$  này c vì t nh th nào. Khi ó ta ph i tìm n bi n pháp th c nghi m, xác nh giá tr c a hàm m t cách r i r c t i các i m – ta c b ng, các th và sau ó là các bi u th c x p x (các công th c th c nghi m). nh lý sau ày giúp ta nh hu ng t t h n trong th c nghi m. Thay vì kh o sát bi n i c a m t s h ng theo s

## Phân tích th nguyên và ng d ng

bi n i c a t ng s h ng riêng r khác thì n gi n h n, ta kh o sát bi n i c a m t nhóm s h ng theo s bi n i c a các nhóm s h ng khác.

*nh lý* : (Buckingham) M t quy lu t v t lý c bi u di n b ng hàm quan h gi a n các i l ng có th nguyên, trong ó có k i l ng có th nguyên c l p, thì quy lu t v t lý ó c ng có th c bi u di n b ng hàm quan h gi a s = n-k các i l ng vô th nguyên

$$\pi = f(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{s-1})$$

Trong ó:

$$\pi_i = \frac{a_{k+i}}{a_1^{a_1} a_2^{a_2} \dots a_k^{a_k}}$$

V i  $a_1, a_2, \dots, a_k$  là các i l ng có th nguyên c l p; các s  $i$  c xác nh t các bi u th c cân b ng th nguyên.

Nói chung, vì c ch n các i l ng có th nguyên c l p có th khá tùy ti n. Tuy v y n u ta không nh h ng tr c thì các s vô th nguyên ...có th s ch ng i di n cho m t y u t nào c a hi n t ng v t lý. mà m t khi các con s không có m t b n ch t v t lý thì khó mà hi u chúng. Thông th ng, i v i các hi n t ng v t lý trong h th ng l u ch t, kích th c (dài, r ng ho c ng kính), v n t c, kh i l ng riêng th ng c ch n làm các i l ng có th nguyên c l p.

Khi phân tích th nguyên, tìm các quy lu t c a m t hi n t ng v t lý nào ó, vì c hi u nó và phân tích các y u t nh h ng là r t quan tr ng. i v i các v n thu c l nh v c c l u ch t, ta có b n nhóm các y u t nh h ng:

- Các c tr ng hình h c: kích th c c tr ng (dài, r ng ho c ng kính), kích th c các mô nhám trên b m t...
- Các c tr ng ng h c: v n t c v, l u l ng Q.
- Các c tr ng ng l c h c: tr ng l c g, áp su t p, gradient áp su t grad (p), ng su t ti p..., l c tác d ng F....
- Tính ch t c a l u ch t: kh i k ng riêng p, nh t  $\mu$  (ho c  $\nu$ ), s c c ng b m t..., modun àn h i E.

Tóm l i

M i s vô th nguyên  $\pi$  có m i l ng c l p chung. Chúng c g i là các i l ng l p l i. Thông th ng các s  $\pi$  c xác nh theo các b c sau:

- Xác nh t ng n các i l ng và xác nh th nguyên c a các i l ng này.

## **Phân tích th nguyên và ng đ ng**

➤ Ch n m i l ng c l p làm các i l ng l p l i và xác nh s l ng s vô th nguyên.

➤ Xác nh các s  $\pi$  theo m i l ng l p l i

### **M t s ví d c th**

Ví d 1: L c F c a l u ch t chuy n ng tác đ ng lên m t v t ng yên ph thu c vào kích th c v t L, v n t c chuy n ng c a l u ch t v, kh i l ng riêng  $\rho$ , nh t  $\mu$ , và modul àn h i E c a l u ch t:  $F(L, v, \rho, \mu, E)$ . Tìm bi u th c vô th nguyên đ i n t s ph thu c này.

*Gi i:*

Có t t c  $n=6$  i l ng tham gia trong quá trình v t lý này. Th nguyên c a t ng i l ng trong h SI:

$$[F] = \frac{M.L}{T^2}$$

$$[L] = L$$

$$[v] = \frac{L}{T}$$

$$[\rho] = \frac{M}{L^3}$$

$$[\mu] = \frac{M}{L.T}$$

$$[E] = \frac{M}{L.T^2}$$

(M- kh i l ng, L- chi u dài, T- th i gian)

Có  $k=3$  i l ng th nguyên c l p. Ta ch n các i l ng này là L, v,  $\rho$ . V y s có  $s=3$  s vô th nguyên. ó là:

$$\pi = \frac{F}{L^a.v^b.\rho^c}$$

$$\pi_1 = \frac{\mu}{L^{a_1}.v^{b_1}.\rho^{c_1}}$$

$$\pi_2 = \frac{E}{L^{a_2}.v^{b_2}.\rho^{c_2}}$$

xác nh a, b, c,  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$ ,  $a_2$ ,  $b_2$ ,  $c_2$ , ta c n phân tích th nguyên các bi u th c c a các s  $\pi$  trên. Chúng có th nguyên c xác nh t ng ng:

$$L^0.M^0.T^0 = \frac{\frac{M.L}{T^2}}{(L)^a \left(\frac{L}{T}\right)^b \left(\frac{M}{L^3}\right)^c} \quad (5.5)$$

$$L^0.M^0.T^0 = \frac{\frac{M.L}{T}}{(L)^{a_1} \left(\frac{L}{T}\right)^{b_1} \left(\frac{M}{L^3}\right)^{c_1}} \quad (5.6)$$

$$L^0.M^0.T^0 = \frac{\frac{M}{L.T^2}}{(L)^{a_2} \left(\frac{L}{T}\right)^{b_2} \left(\frac{M}{L^3}\right)^{c_2}} \quad (5.7)$$

Cân b ng th nguyên các bi u th c (5.5)-(5.7) theo M,L, T s cho ta các h ph ng trình và l i gi i t ng ng c a chúng:

$$\begin{aligned} \text{M: } 1-c &= 0 & a &= 2 \\ \text{L: } 1-a-b+3c &= 0 & \Rightarrow b &= 2 \\ \text{T: } -2+b &= 0 & c &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{M: } 1-c_1 &= 0 & a_1 &= 1 \\ \text{L: } -1-a_1-b_1+3c_1 &= 0 & \Rightarrow b_1 &= 1 \\ \text{T: } -1+b_1 &= 0 & c_1 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{M: } 1-c_2 &= 0 & a_2 &= 0 \\ \text{L: } -1-a_2-b_2+3c_2 &= 0 & \Rightarrow b_2 &= 2 \\ \text{T: } -1+b_2 &= 0 & c_2 &= 1 \end{aligned}$$

V y:

$$\pi = \frac{F}{L^2.v^2.\rho}$$

$$\pi_1 = \frac{\mu}{L.v.\rho}$$

$$\pi_2 = \frac{E}{v^2.\rho}$$

Quan h quan h trong bài có th vi t l i:

$$\frac{F}{L^2.v^2.\rho} = \frac{\mu}{L.v.\rho} = \frac{E}{v^2.\rho} \quad (5.8)$$

Các số vô thứ nguyên  $\pi_1, \pi_2, \pi$  tìm được trên có ý nghĩa vật lý cụ thể. Nếu biết ta thứ nguyên thì:

$$C_f = \frac{F}{\frac{1}{2} \rho \cdot v^2 \cdot L^2}$$

$$Re = \frac{\rho \cdot v \cdot L}{\mu}$$

$$M = \frac{v}{\sqrt{E/\rho}}$$

Và gọi chúng là hệ số Reynolds và số Mach. Số Reynolds đặc trưng cho lực ma sát còn số Mach là tốc độ gia vận tốc chảy và vận tốc truyền âm. Với các ký hiệu trên, (5.8) có thể viết ngắn gọn như sau:

$$C_f = f(Re, M) \quad (5.9)$$

Quy luật viết dưới dạng quan hệ này cho phép ta đi đến nó dưới dạng bảng, đồ thị và xếp nó thành công thức thực nghiệm ngắn gọn như sau với dạng (5.4)

Ví dụ 2: ứng suất ma sát  $\tau$  trên bề mặt dòng chảy chất lỏng không nén được phụ thuộc vào đường kính ống  $D$ , kích thước mô nhám  $\Delta$  của bề mặt ống, vận tốc chuyển động của chất lỏng  $v$ , khối lượng riêng  $\rho$ , và nhớt động lực học  $\mu$  của chất lỏng  $\tau = f(D, \Delta, v, \rho, \mu)$ . Tìm biểu thức vô thứ nguyên để tính số phụ thuộc này.

Gọi:

$$[\tau] = \frac{M \cdot L}{T^2}$$

$$[D] = L$$

$$[\Delta] = L$$

$$[v] = \frac{L}{T}$$

$$[\rho] = \frac{M}{L^3}$$

$$[\mu] = \frac{M}{L \cdot T}$$

Có  $k=3$  đại lượng có thứ nguyên cơ bản. Ta chọn các đại lượng này là  $D, v, \rho$ . Vậy sẽ có  $s=3$  số vô thứ nguyên. Đó là:



$$\pi = \frac{\tau}{D^a \cdot v^b \cdot \rho^c}$$

$$\pi_1 = \frac{\Delta}{D^{a_1} \cdot v^{b_1} \cdot \rho^{c_1}}$$

$$\pi_2 = \frac{\mu}{D^{a_2} \cdot v^{b_2} \cdot \rho^{c_2}}$$

Phân tích th nguyên các bi u th c trên ta c:

$$L^0 \cdot M^0 \cdot T^0 = \frac{\frac{M \cdot L}{T^2}}{(L)^a \left(\frac{L}{T}\right)^b \left(\frac{M}{L^3}\right)^c} \quad (5.11)$$

$$L^0 \cdot M^0 \cdot T^0 = \frac{\frac{M \cdot L}{T}}{(L)^{a_1} \left(\frac{L}{T}\right)^{b_1} \left(\frac{M}{L^3}\right)^{c_1}} \quad (5.12)$$

$$L^0 \cdot M^0 \cdot T^0 = \frac{\frac{M}{L \cdot T^2}}{(L)^{a_2} \left(\frac{L}{T}\right)^{b_2} \left(\frac{M}{L^3}\right)^{c_2}} \quad (5.13)$$

Mà cân b ng th nguyên c a các bi u th c trên cho ta:

$$\begin{aligned} \text{M: } 1-c &= 0 & a &= 0 \\ \text{L: } -1-a-b+3c &= 0 & \Rightarrow b &= 2 \\ \text{T: } -2+b &= 0 & c &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{M: } -c_1 &= 0 & a_1 &= 1 \\ \text{L: } 1-a_1-b_1+3c_1 &= 0 & \Rightarrow b_1 &= 0 \\ \text{T: } b_1 &= 0 & c_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{M: } 1-c_2 &= 0 & a_2 &= 1 \\ \text{L: } -1-a_2-b_2+3c_2 &= 0 & \Rightarrow b_2 &= 1 \\ \text{T: } -1+b_2 &= 0 & c_2 &= 1 \end{aligned}$$

V y:

$$\pi = \frac{\tau}{v^2 \cdot \rho}$$

$$\pi_1 = \frac{\Delta}{D} = \bar{\Delta} \quad (\text{nhóm t ng i})$$

$$\pi_2 = \frac{\mu}{D.v.\rho} = \frac{1}{\text{Re}}$$

Nh v y, quan h cho trên c ng có th vi t:

$$\frac{\tau}{v.\rho} = f(\bar{\Delta}, \text{Re}) \quad (5.14)$$

Ví d 3: L c c n  $F_D$  do l u ch t tác d ng v t th hình c u tro l u ch t chuy n ng ph thu c ng kính  $D$ , v n t c l u ch t  $V$ , kh i l ng riêng  $\rho$ , h s nh t  $\mu$  và h s àn h i KT. Tìm bi u th c vô th nguyên liên h các i l ng này.

Gi i

Ta có hàm quan h c a 6 i l ng:

$$F_D = f(D, V, \rho, \mu, KT)$$

Phân tích th nguyên các i l ng:

$$\begin{aligned} [F_D] &= MLT^{-2} & ; [D] &= L \\ [V] &= LT^{-1} & ; [\rho] &= ML^{-3} \\ [\mu] &= MLT^{-1} & ; [K] &= ML^{-1}T^{-2} \end{aligned}$$

- S i l ng có th nguyên:  $n=6$
- S i l ng có th nguyên có th nguyên c l p:  $m=3$
- Ch n 3 i l ng l p l i là  $D, V, \rho$
- S i l ng vô th nguyên  $\pi$ :  $n-m=3$
- ✓ Xác nh các s  $\pi$ :
- S  $\pi_1$ :

$$\pi_1 = \frac{F_D}{D^{a1}V^{b1}\rho^{c1}} \Rightarrow 1 = \frac{MLT^{-2}}{(L)^{a1}(LT^{-1})^{b1}(ML^{-3})^{c1}}$$

Cân b ng theo:

$$\begin{array}{ll} M: 1=c1 & \Rightarrow a1=2 \\ L: 1=a1+ b1 - 3c1 & b1=2 \\ T: -2= -b1 & c1=1 \end{array}$$

S  $\pi_1$  khi ó:

$$\pi_1 = \frac{F_D}{\rho V^2 D^2} = 2C_D$$

- S  $\pi_2$ :

$$\pi_2 = \frac{\mu}{D^{a_2} V^{b_2} \rho^{c_2}} \Rightarrow 1 = \frac{ML^{-1}T^{-1}}{(L)^{a_2} (LT^{-1})^{b_2} (ML^{-3})^{c_2}}$$

Cân b ng theo:

$$M: 1=c_2 \quad a_2=1$$

$$L: -1=a_2+ b_2 - 3c_2 \quad \Rightarrow \quad b_2=1$$

$$T: -1= -b_2 \quad c_2=1$$

S  $\pi_2$  khi ó:

$$\pi_2 = \frac{\mu}{DV\rho} = \frac{1}{Re_D}$$

- Xác nh s  $\pi_3$ :

$$\pi_3 = \frac{K}{D^{a_3} V^{b_3} \rho^{c_3}} \Rightarrow 1 = \frac{ML^{-1}T^{-2}}{(L)^{a_3} (LT^{-1})^{b_3} (ML^{-3})^{c_3}}$$

Cân b ng theo:

$$M: 1=c_3 \quad a_3=0$$

$$L: 1=a_3+ b_3 - 3c_3 \quad \Rightarrow \quad b_3=2$$

$$T: -2= -b_3 \quad c_3=1$$

S  $\pi_3$  khi ó:

$$\pi_3 = \frac{K}{V^2 \rho^1}$$

V y quan h gi a l c c n và các i l ng d i d ng vô th nguyên có d ng:

$$\frac{F_D}{\rho V^2 D^2} = \varphi(Re_D, M)$$

Ví d 4: Phân tích chuy n ng c a k u ch t trong m t ng tròn ta th y t n th t áp su t  $\Delta p$

Ph thu c vào chi u dài L, ng kính D c a ng, v n t c trung bình V, kh i l ng riêng  $\rho$ , nh t  $\mu$ , nhám b m t ng  $\Delta$ . Tìm bi u th c tính  $\Delta p$ .

Gi i

Ta có hàm quan h gi a 7 i l ng:

$$\Delta p = f(L, D, \Delta, V, \rho, \mu)$$

## Phân tích th nguyên và ng đ ng

Phân tích th nguyên gĩa các il ng:

$$\begin{aligned} [\Delta p] &= ML^{-1}T^{-2} & ; [L] &= L & ; [D] &= L \\ [\Delta] &= L & ; [V] &= LT^{-1} & ; [\rho] &= ML^{-3} \end{aligned}$$

- S il ng có th nguyên:  $n=7$
- S il ng có th nguyên có th nguyên c l p:  $m=3$
- Ch n 3 il ng l p l i là  $D, V, \rho$
- S il ng vô th nguyên  $\pi : n-m=4$
- ✓ Xác nh các s  $\pi$  :
- S  $\pi_1$  :

$$\pi_1 = \frac{\Delta p}{D^{a_1} V^{b_1} \rho^{c_1}} \Rightarrow 1 = \frac{ML^{-1}T^{-2}}{(L)^{a_1} (LT^{-1})^{b_1} (ML^{-3})^{c_1}}$$

Cân b ng theo:

$$M: 1=c_1 \quad a_1=0$$

$$L: -1=a_1+b_1-3c_1 \quad \Rightarrow \quad b_1=2$$

$$T: -2=-b_1 \quad c_1=1$$

S  $\pi_1$  khi ó:

$$\pi_1 = \frac{\Delta p}{V^2 \rho} = 2Cp \quad (\text{h s áp su t})$$

- S  $\pi_2$  :

$$\pi_2 = \frac{\mu}{D^{a_2} V^{b_2} \rho^{c_2}} \Rightarrow 1 = \frac{ML^{-1}T^{-1}}{(L)^{a_2} (LT^{-1})^{b_2} (ML^{-3})^{c_2}}$$

Cân b ng theo:

$$M: 1=c_2 \quad a_2=1$$

$$L: -1=a_2+b_2-3c_2 \quad \Rightarrow \quad b_2=1$$

$$T: -1=-b_2 \quad c_2=1$$

S  $\pi_2$  khi ó:

$$\pi_2 = \frac{\mu}{DV\rho} = \frac{1}{Re_D}$$

- Xác nh s  $\pi_3$  :

$$\pi_3 = \frac{L}{D^{a_3} V^{b_3} \rho^{c_3}} \Rightarrow 1 = \frac{L^1}{(L)^{a_3} (LT^{-1})^{b_3} (ML^{-3})^{c_3}}$$

Cân b ng theo:

## Phân tích th nguyên và ng d ng

$$M: 0=c_3 \quad a_3=1$$

$$L: l=a_3+ b_3 - 3c_3 \quad \implies \quad b_3=0$$

$$T: 0= -b_3 \quad c_3=0$$

S  $\pi_3$  khi ó:

$$\pi_3 = \frac{L}{D}$$

S  $\pi_4$ :

$$\pi_4 = \frac{\Delta}{D^{a_4} V^{b_4} \rho^{c_4}}$$

- S  $\pi_4$  c xác nh t ng t nh s  $\pi_3$  và có th c vì t:

$$\pi_4 = \frac{\Delta}{D}$$

V y ta có quan h vô th nguyên nh sau:

$$\frac{\Delta p}{\rho V^2} = F\left(\text{Re}_D, \frac{L}{D}, \frac{\Delta}{D}\right)$$

## II. NG D NG

### 1. Khái ni m ng d ng

#### 1.1 nh ngh a

Các hi nt ng cùng b n ch t v t lý c g i là ng d ng v i nhau n u nh t t c các i l ng c tr ng c a chúng ng d ng: t i các i m t ng ng, trong các th i i m t ng ng, t t c các i l ng có h ng ph i ng d ng hình h c, t t c các i l ng vô h ng ph i t ng ng t l v i nhau.

Ta quy c g i hai h th ng ng d ng, m t h th ng là th c (v i ch s T) còn m t h th ng là mô hình d ng d ng (v i ch s M) c a h th ng kia.

Trong l nh v c c l u ch t, khái ni m ng d ng bao g m ba n i dung:

#### 1.2 ng d ng hình h c

Hai h th ng l u ch t là ng d ng hình h c v i nhau n u các kích th c t ng ng c a chúng t l v i nhau.

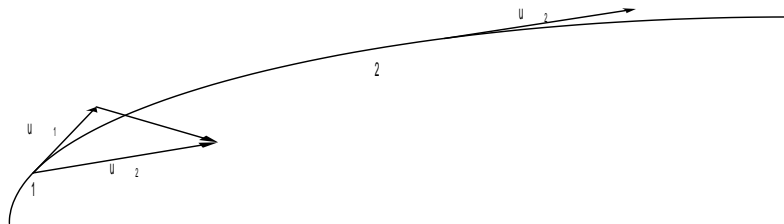
$$\text{Ta g i t l mô hình } a_1 \text{ là t s : } a_1 = \frac{I_M}{I_T}$$

V i  $I_M, I_T$  là các kích th c b t k , t ng ng v i nhau c a mô hình và h th ng th c.

### 1.3 ứng dụng hình học:

Hai hệ thống lực là ứng dụng hình học với nhau nếu:

- Quá trình chuyển đổi các phần tử lực từ ứng dụng của chúng ứng dụng hình học với nhau.
- Giá trị của vận tốc và gia tốc tại các điểm ứng dụng tại các thời điểm ứng dụng là với nhau.



Nói một cách khác, ứng dụng hình học có nghĩa là ứng dụng hình học của tam giác tạo bởi các vector vận tốc (và gia tốc) tại các điểm ứng dụng xem hình

Ta có các tỉ lệ vận tốc  $a_u$ , gia tốc  $a_w$  và thời gian  $a_T$ :

$$a_u = \frac{u_M}{u_T}$$

$$a_w = \frac{w_M}{w_T}$$

$$a_t = \frac{t_M}{t_T} = \frac{a_l}{a_u}$$

### 1.4 ứng dụng động lực học

Hai hệ thống lực là ứng dụng động lực học với nhau nếu:

- Tại các điểm ứng dụng có những lực cùng loại tác động.
- Tất cả giá trị của các lực cùng loại tác động tại các điểm ứng dụng là như nhau trong toàn bộ thời gian.
- Lực tác động lên hệ thống theo những hướng nào thì lực tác động mô hình cũng phải như vậy.

Nói một cách khác, ứng dụng động lực học có nghĩa là ứng dụng hình học của tam giác tạo bởi các vector lực (và gia tốc) tại các điểm ứng dụng.

Ta có tỉ lệ lực  $a_F = \frac{F_M}{F_T}$

## Phân tích thí nghiệm và mô hình

Mô hình hình học là mô hình có mô hình hình học. Hai hình thức lực học tĩnh học và động học tĩnh học.

Vấn đề tiếp là phải thiết lập mô hình nào đó trong đó mô hình hình học và động học tĩnh học.

- Chọn mô hình vật lý của nó.
- Áp dụng nguyên lý cơ bản của mô hình sao cho mô hình hình học và động học tĩnh học.
- Chọn số lượng biến trong thí nghiệm và các tính chất của nó ( $\rho, \mu, E, \dots$ ) sao cho trên biên tải mô hình hình học.

Vì các hiện tượng xảy ra thực tế và trong mô hình có cùng một quy luật vật lý (cùng một bản chất vật lý), vì vậy các điều kiện ban đầu và điều kiện biên mô hình hình học và động học tĩnh học, nên ta sẽ mô hình mô hình hình học các thông số mô hình hình học và động học tĩnh học.

Tuy vậy ngay cả khi kiểm soát một cách tiếp cận điều kiện tải mô hình hình học trên biên tải khó có thể hiện. Cần là chuyển các tải tác động là một vị trí khó khăn. Hơn nữa, nhiều khi “thực tế” vẫn còn trên thiết kế, mô hình giúp ta đánh giá “thực tế” này có yêu cầu hay không cho phép nó ra đi, vậy thì làm gì có cho ta. Nếu ta tìm kiếm phương pháp đánh giá gián tiếp – số lượng các tiêu chuẩn mô hình hình học.

### 2. Các tiêu chuẩn mô hình

Trong trường hợp tổng quát, tất cả các tải tác động: trọng lực  $G$ , tải cơ học  $F_C$ , tải nén  $F_n, \dots$ . Theo nguyên lý D'Alembert, tổng tất cả các tải tác động lên phần cân bằng vật thể quán tính I:

$$\vec{G} + \vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_C + \vec{F}_n + \dots + \vec{I} = 0$$

$$\text{Vì } \vec{I} = -M\vec{w}$$

M: khối lượng

w: gia tốc chuyển động

Bây giờ ta xét các trường hợp riêng, khi chỉ có tải trọng trong các tải trên.

#### 2.1 Khi chỉ có trọng lực $G$ tác động

Khi có mô hình hình học, tải trọng không cho mô hình cùng cân bằng:

$$a_F = \frac{G_M}{G_T} = \frac{I_M}{I_T} \Rightarrow \frac{I_M}{G_M} = \frac{I_T}{G_T} s$$

Trong hệ SI, các lực quán tính và trọng lực có thể tính (với các đơn vị) như sau:  
chiều dài L, khối lượng M, thời gian T là các giá trị cơ bản của hệ thống)

$$I = \rho L^3 w = \rho L^3 \frac{u}{T} = \rho L^2 \frac{L}{T} u = \rho L^2 u^2$$

$$G = \rho g L^3$$

(Thấy rằng trong các công thức tính lực trên còn có các hằng số chuyển đổi đơn vị, nhưng do các hằng số ứng dụng hình học và vật lý nên chúng sẽ biến đổi trong các thí nghiệm)

Các thí nghiệm cho ta

$$\frac{(\rho L^2 u^2)_M}{(\rho g L^3)_M} = \frac{(\rho L^2 u^2)_T}{(\rho g L^3)_T} \Rightarrow \frac{u_M^2}{g_M L_M} = \frac{u_T^2}{g_T L_T}$$

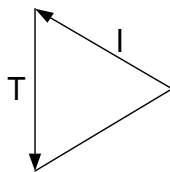
Ta ký hiệu:  $Fr = \frac{u^2}{gL}$  và gọi là Froude. Nó là một số vô thứ nguyên và chính là tỉ số giữa lực quán tính và trọng lực. Như vậy có thể viết:

$$Fr_M = Fr_T$$

Đây chính là tiêu chuẩn Froude. Công thức trên cho phép kết luận trọng lực tương đương nhau. Như vậy bằng công thức này thì chúng ta có thể mô phỏng động lực học. Hệ thống còn cần phải mô phỏng hình học, vật lý và những ảnh hưởng khác nhau mà nó có thể gây ra.

## 2.2 Khi có lực ma sát Tác động

Ta có thí nghiệm:



$$a_F = \frac{T_M}{T_T} = \frac{I_M}{I_T} \Rightarrow \frac{I_M}{T_M} = \frac{I_T}{T_T}$$

Thí nghiệm trên lực ma sát có thể tính:

$$T = \mu \frac{du}{dy} L^2 = \mu \frac{u}{L} L^2 = \mu L u$$

Các thí nghiệm cho ta:



$$\frac{(\rho L^2 u^2)_M}{(\mu L u)_M} = \frac{(\rho L^2 u^2)_T}{(\mu L u)_T} \Rightarrow \frac{\rho_M u_M L_M}{\mu_M} = \frac{\rho_T u_T L_T}{\mu_T}$$

Ta ký hi u:  $Re = \frac{\rho u L}{\mu} = \frac{u L}{\nu}$  và g i ó là s Reynolds. Nó là m t vô s th nguyên

và chính là t s gi a l c quán tính và l c ma sát. Nh v y có th vi t:

$$Re_M = Re_T$$

ó chính là tiêu chu n Reynolds. ng th c trên cho phép k t lu n l c ma sát t l v i nhau (nh ng c ng ch a m b o các l c nh h ng gi ng nhau)

### 2.3 Các tiêu chu n khác

B nng cách t ng t , ta s tìm c các s vô th nguyên khác:

S m ch:  $M = \frac{u}{\sqrt{E \rho}} = \frac{u}{a}$  T l l c quán tính và l c nén (a: v n t c truy n âm

thanh)s Weber:  $W = \frac{\rho L u^2}{\sigma}$  t l l c quán tính và l c c ng b m t

S Euler:  $Eu = \frac{p}{\rho u^2}$  t l áp l c và l c quán tính

S Strukhan:  $Sh = \frac{L}{u T}$  t l quán tính c c b và quán tính i l u ( c tr ng cho

quá trình không d ng). T ng ng v i các s vô th nguyên trên là các tiêu chu n ng d ng. ó là s cân b ng c a các c p s vô th nguyên tính theo m t kích th c, v trí.....b t k trên mô hình và trên h th ng th c.

Trong th ng h p t ng quát, khi có nhi u l c cùng tác d ng, t c ng d ng ng l c h c gi a các h th ng, ph i th a m ã s cân b ng c a t t c các c p s nguyên t ng ng v i các l c ó.

Ghi chú: Các s vô th nguyên  $Re, Fr, M, \dots$  c tính nh trên b ng giá tr v n t c u t i i m. Nh ng trong th c t , ta th ng làm vi c v i v n t c trung bình v trên m t c t. Ta có th s d ng v thay cho u tính các s vô th nguyên trên và tiêu chu n ng d ng khi ó ph i t ng thêm i u ki n ng d ng c a các bi u phân b v n t c.

### 3. ng d ng không hoàn h o và các l ai mô hình ng d ng.

N u ta xây d ng mô hình theo nh ng gì nói trên, ta c m t mô hình ng d ng m t cách hoàn toàn. Trong th c t , không ph i bao gi c ng có th t c nh v y. Thông th ng tiêu chu n Froude và Reynolds i ngh ch nhau, th ng không

## Phân tích th nguyên và ng d ng

cùng th a mẫn. Ta luôn g p khó kh n khi ph i ch n l a th l u ch t có nh t ng h c v sao cho có th th a mẫn ng th i hai tiêu chu n trên. Còn s Mach th ng không ngh ch v i s Reynolds. Do v y, trong t ng tr ng h p c th , ta ph i xem xét l ai l c nào có tính quy t nh trong h th ng mà xây d ng mô hình theo tiêu chu n t ng ng v i l ai l c ó. Còn các tiêu chu n khác thì tùy, n u không th a mẫn c thì c ng c g ng làm chúng ng quá cách xa, các ch ch y không quá khác bi t. Khi ó, ta có mô hình g n úng – không hoàn h o. Các k t qu thu c mô hình này ph n ánh không hoàn toàn chính xác th c t . Khi em nó ra h th ng th c, ta c n có nh ng h s hi u ch nh.

Ngoài ra, khi các kích th c không gian c a h th ng quá khác bi t nhau, n u dùng t l mô hình nh nhau cho m i chi u không gian thì có th m t kích th c nào ó trên mô hình s quá nh , không th thí nghiệm ( o c) c ho c nh h ng c a s c c ng b m t tr nên rõ r t, làm sai l c k t qu . Trong th n h p ó, ta có th làm mô hình v i các t l mô hình khác nhau cho các chi u không gian. i u này ta có th g p khi làm các máy th y l c, các dòng ch y ngoài t nhiên (sông, bi n...)

### B NG CHUY N I CÁC T S CHO MÔ HÌNH

T s	Re	Fr	Fr*	M
$\frac{v_M}{v_T}$	$\frac{L_T \rho_T \mu_M}{L_M \rho_M \mu_T}$	$\left[ \frac{L_M}{L_T} \right]^{12}$	$\left[ \frac{H_M}{H_T} \right]^{12}$	$\left[ \frac{\gamma_M R_M \theta_M}{\gamma_T R_T \theta_T} \right]^{12}$
$\frac{Q_M}{Q_T}$	$\frac{L_T \rho_T \mu_M}{L_M \rho_M \mu_T}$	$\left[ \frac{L_M}{L_T} \right]^{52}$	$\left[ \frac{H_M}{H_T} \right]^2 \left[ \frac{H_M}{H_T} \right]^{12}$	
$\frac{F_M}{F_T}$	$\frac{\mu_M^2 \rho_T}{\mu_T^2 \rho_M}$	$\frac{\rho_M}{\rho_T} \left[ \frac{L_M}{L_T} \right]^3$	$\frac{\rho_M}{\rho_T} \left[ \frac{L_M}{L_T} \right]^2 \left[ \frac{H_M}{H_T} \right]$	$\frac{E_M}{E_T} \left[ \frac{L_M}{L_T} \right]^2$
$\frac{t_M}{t_T}$	$\frac{L_M^2 \rho_M \mu_T}{L_T^2 \rho_T \mu_M}$	$\left[ \frac{L_M}{L_T} \right]^{12}$	$\left[ \frac{L_M}{L_T} \right] \left[ \frac{H_T}{H_M} \right]^{12}$	$\left[ \frac{\gamma_T R_T \theta_T}{\gamma_M R_M \theta_M} \right]^{12} \frac{L_M}{L_T}$

Ghi chú: Mô hình Fr\* (Froude) dành cho máy th y l c

Ta có m t s nh h ng cho các tiêu chu n sau:

Mô hình ng d ng ng l c h c hoàn toàn òi h i t t c các s vô th nguyên t ng ng b ng nhau. Trên th c t nhi u khi r t khó th c hi n mô hình ng d ng ng l c



## Phân tích thí nghiệm và ứng dụng

hệ hoàn toàn. Ví dụ lưu chất chuyển động trong ống, trong ống hở, lưu chất chuyển động bao quanh vật rắn như máy bay, tàu ngầm, xe cộ, nhà cửa...

Mô hình động học hệ hoàn toàn đòi hỏi tất cả các số vô thứ nguyên tương đương nhau. Trên thực tế khi rất khó thể hiện mô hình động học hệ hoàn toàn. Ví dụ lưu chất chuyển động trong ống, trong ống hở, lưu chất chuyển động bao quanh vật rắn như máy bay, tàu ngầm, xe cộ, nhà cửa...

### 3.1 Mô hình Froude:

Áp dụng trong trường hợp dòng chảy có mặt thoáng, như nước chảy trong ống hở. Ví dụ dòng chảy trong sông, vịnh, dòng chảy qua các đập tràn rãnh hoặc kênh dẫn do sóng tác động vào tàu thuyền, hải cẩu.

$$Fr_m = Fr_t$$

$$\frac{v_m^2}{gL_m} = \frac{v_t^2}{gL_t}$$

Trường hợp mô hình sông, phải dùng 2 tỷ lệ hình học ta gọi là mô hình Froude không hoàn hảo.



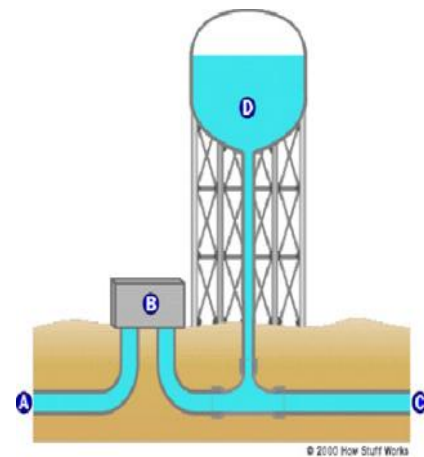
### 3.2 Mô hình Reynolds

Áp dụng trong trường hợp dòng chảy không có mặt thoáng, như nước chảy trong ống kín không thoáng khí so với môi trường.

Ví dụ: chất lưu chuyển động trong ống, trong ống hở hoặc chất lưu chuyển động bao quanh vật rắn như máy bay, tàu ngầm, xe cộ, nhà cửa... hoặc tính toán lực cản trên vật chuyển động trong chất lỏng, tàu ngầm...

$$Re_m = Re_t$$

$$\frac{v_m D_m}{\nu_m} = \frac{v_t D_t}{\nu_t}$$



### 3.3 Mô hình Mach

Dùng khi làm mô hình các chuyển động với vận tốc cao (vận tốc so sánh với vận tốc âm thanh): máy bay, tên lửa,...

Áp dụng cho các chuyển động có số Mach lớn  $M \geq 0.3$

$$M_m = M_t$$

$$\frac{V_m^2}{K_m / \rho_m} = \frac{V_t^2}{K_t / \rho_t}$$

Trong tr ng h p này s Reynolds v n còn có nh h ng áng k .

Mô hình ng d ng c a các máy th y l c:

Ví d : b m, qu t, turbine, máy nén, chong chóng...

$f(Q, N, \eta, n, gH, D, \rho, \mu, K, M, F) = 0$

$$\frac{Q}{nD^3} = f\left(\eta, \frac{gH}{n^2 D^2}, \frac{N}{\rho n^3 D^5}, \text{Re}, M_0, C_m, C_F\right) = 0$$

$$\text{V i} \quad \text{Re} = \frac{\rho n D^2}{\mu} \quad C_M = \frac{M_0}{\rho n^2 D^5}$$

$$M_0 = \frac{nD}{\sqrt{K/\rho}} \quad C_F = \frac{F}{\rho n^2 D^4}$$

Thông th ng r t khó th c hi n mô hình có vùng s Reynolds v i nguyên th nên  $\text{Re}_m$  và  $\text{Re}_t$  có th sai l ch vài ph n tr m.

S Mach ch quan tr ng trong các máy nén ho c turbine khí

B ng t s mô hình:

T s	Mô hình Reynolds	Mô hình Froude	Mô hình Froude không hoàn h o
v n t c $\frac{V_m}{V_t}$	$\frac{L_t \rho_t \mu_m}{L_m \rho_m \mu_t}$	$\left[\frac{L_m}{L_t}\right]^{1/2}$	$\left[\frac{L_m}{L_t}\right]^{1/2}$ ng
v n t c góc $\frac{\omega_m}{\omega_t}$	$\left[\frac{L_m}{L_t}\right]^2 \frac{\rho_t \mu_m}{\rho_m \mu_t}$	$\left[\frac{L_t}{L_m}\right]^{1/2}$	Không quan tr ng
L u l ng $\frac{t_m}{t_t}$	$\frac{L_m \rho_t \mu_m}{L_t \rho_m \mu_t}$	$\left[\frac{L_m}{L_t}\right]^{5/2}$	$\left[\frac{L_t}{L_m}\right]^{3/2}_{dg}$
th i gian $\frac{t_m}{t_t}$	$\left[\frac{L_m}{L_t}\right] \frac{\rho_m \mu_t}{\rho_t \mu_m}$	$\left[\frac{L_m}{L_t}\right]^{1/2}$	$\left[\frac{L_m}{L_t}\right]_{ng} \left[\frac{L_m}{L_t}\right]^{1/2}_{dg}$
l c $\frac{F_m}{F_t}$	$\left[\frac{\mu_m}{\mu_t}\right]^2 \frac{\rho_t}{\rho_m}$	$\left[\frac{L_m}{L_t}\right]^3 \frac{\rho_m}{\rho_t}$	$\frac{\rho_m}{\rho_t} \left[\frac{L_m}{L_t}\right]_{ng} \left[\frac{L_m}{L_t}\right]^2_{dg}$



### 3.4 Ứng dụng các thiết bị thí nghiệm



Máy nén khí thí nghiệm



Máy rút chân thí nghiệm



Máy thí nghiệm cách nhiệt



Tàu ngầm hộ tống Anh

### 4. Bài tập ví dụ

Ví dụ 1: dòng nước ( $\nu = 0.01 \text{ cm}^2/\text{s}$ ) chảy trong ống có chiều dài 10m mô hình dòng chảy không khí nhớt và áp suất bình thường ( $\nu = 0.15 \text{ cm}^2/\text{s}$ ). Tìm tốc độ dòng chảy.

Lời giải:

ứng dụng nguyên lý cân bằng Reynolds:

$$\text{Re}_M = \text{Re}_T$$

$$\begin{aligned} \frac{v_M D_M}{\nu_M} &= \frac{v_T D_T}{\nu_T} \Rightarrow \frac{v_M}{v_T} = \frac{D_T}{D_M} \frac{\nu_M}{\nu_T} \\ &= \frac{10}{1} \cdot \frac{0.15 \text{ cm}^2/\text{s}}{0.01 \text{ cm}^2/\text{s}} = 150 \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Tìm các đặc số cơ bản của máy thủy lực, công suất của hai máy thủy lực năng lượng bằng nhau. Biết hai máy hoạt động trong môi trường trọng lực như nhau.

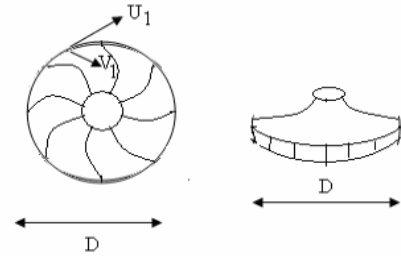
Lưu ý:

Máy thủy lực (bơm, turbine) có các thông số: đường kính D bánh xe công tác (rotor), cột áp H, tốc độ quay n, lưu lượng Q và công suất P. Mô hình máy thủy lực làm theo tiêu chuẩn Froude, tìm

điều kiện:

$$Fr_M = Fr_T \Rightarrow \frac{u_M^2}{g_M H_M} = \frac{u_T^2}{g_T H_T}$$

$$\text{Vậy: } \frac{u_M}{u_T} = \left( \frac{H_M}{H_T} \right)^{1/2} \quad (g_M = g_T = g)$$



Vận tốc quay của bánh xe công tác tại mép ngoài:  $u_1 = \pi D n / 60$

Vận tốc hướng tâm của chất lỏng tại mép ngoài:  $v_1 = Q / \pi D b$ .

Do hai máy năng lượng bằng nhau, các vận tốc bằng nhau vận tốc quay tại mép bánh xe:

$$\frac{u_M}{u_T} = \frac{u_{1M}}{u_{1T}} = \frac{\pi D_M n_M / 60}{\pi D_T n_T / 60} \Rightarrow \frac{n_M}{n_T} = \frac{D_T}{D_M} \left( \frac{H_M}{H_T} \right)^{1/2}$$

năng lượng bằng nhau cho ta:

$$\frac{u_{1M}}{u_{1T}} = \frac{v_{1M}}{v_{1T}} \Rightarrow \frac{\pi D_M n_M / 60}{\pi D_T n_T / 60} = \frac{Q_M}{Q_T} \frac{\pi D_M b_M}{\pi D_T b_T}$$

Nên:

$$\frac{Q_M}{Q_T} = \frac{D_M n_M}{D_T n_T} \frac{D_M b_M}{D_T b} = \left( \frac{D_M}{D_T} \right)^2 \left( \frac{H_M}{H_T} \right)^{1/2}$$

$$(b_M / b_T = D_M / D_T)$$

Công suất của máy tính theo công thức:

$$P = \gamma Q H$$

Vì vậy, các công suất:

$$\frac{P_M}{P_T} = \frac{\gamma_M Q_M H_M}{\gamma_T Q_T H_T} = \left( \frac{D_M}{D_T} \right)^2 \left( \frac{H_M}{H_T} \right)^{3/2}$$